

Programa olimpiadei de matematică clasele V – VIII

An școlar 2009 / 2010

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse în mod implicit conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare. Cunoștințele suplimentare față de programa școlară, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

Clasa a VII-a

- Etapa județeană (municipiul București)

ALGEBRĂ

1. Mulțimea numerelor întregi; Mulțimea numerelor raționale; Mulțimea numerelor reale;

2. Modulul unui număr real. Proprietăți: a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$; b) $|x| = \max(-x; x), \forall x \in \mathbf{R}$;

c) $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$; d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}^*$; e) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$;

f) $|x| \leq a (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; g) $|x| \geq a (a > 0), a, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \geq a \text{ sau } x \leq -a$;

h) $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbf{R}$.

3. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real; Reguli de calcul cu radicali (conținutul programei școlare).

a) Dacă $a \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$; b) Dacă $a, b \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{N}$ și $\sqrt{b} \in \mathbf{N}$;

c) Dacă a și b nu sunt pătrate ale unor numere raționale, atunci $\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$; d) Dacă $a, b \in \mathbf{Q}^*$ și $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât, atunci $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b} \in \mathbf{Q}^*$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$; e) Dacă $a, b \in \mathbf{Q}^*$ astfel încât $\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci $a \pm \sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și $a\sqrt{b} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; f) Dacă $a \in \mathbf{Q}^*$ și $b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, atunci $a + b \in$

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și $ab \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; g) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}^*$ și $c^2 = a^2 - b$ (formula radicalilor dubli).

4. Calcul algebric; Calcule cu numere reale reprezentate prin litere (conținutul programei școlare);

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$;

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}, n$ impar;

$(a+b)^n = M_a + b^n$, unde $a, b \in \mathbf{Z}$, și $n \in \mathbf{N}^*$; $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ (identitatea lui Lagrange)

GEOMETRIE

1. Patruletere (conținutul programei școlare).

2. Probleme de coliniaritate. Probleme de concurență.

3. Asemănarea triunghiurilor

Teorema lui Thales. Teorema reciprocă a teoremei lui Thales. Teorema paralelelor echidistante.

Teorema paralelelor neechidistante. Linia mijlocie în triunghi; proprietăți. Centrul de greutate al unui

triunghi; proprietăți. Linia mijlocie în trapez; proprietăți. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii

de asemănare a triunghiurilor. Teorema bisectoarei (interioare, exterioare) și teorema reciprocă.

Teorema lui Menelaos; teorema reciprocă. Teorema lui Ceva; teorema reciprocă.

- Etapa națională

ALGEBRĂ

1. Inegalități. Sume. Probleme de maxim și de minim.

a. $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbf{R}$; b. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbf{R}$; c. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;

$\forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$;

$$d. \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \forall a_i \in \mathbf{R}_+, i = \overline{1, n} \text{ și}$$

$\forall n \in \mathbf{N}^*$ (inegalitatea mediilor);

$$f. (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n} \text{ și}$$

$\forall n \in \mathbf{N}^*$ (inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz).

2. Ecuații. Probleme.

GEOMETRIE

1. Relații metrice în triunghi. În triunghiul dreptunghic: teorema înălțimii; teorema catetei; teorema lui Pitagora; teoreme reciproce. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic: sin, cos, tg, ctg.

Teorema lui Pitagora generalizată. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor. Teorema medianei:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \text{ Arii. } A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; A_\Delta = \frac{ab \sin C}{2}; A_\Delta = pr; A_\Delta = \frac{abc}{4S};$$

$$A_{\text{patrulat. convex}} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin[\angle(d_1, d_2)]}{2}.$$

2. Pentru baraj, în plus: Cercul

Definiție. Elemente în cerc. Unghi la centru. Măsura arcelor. Coarde și arce; proprietăți. Teorema unghiului înscris în cerc. Cerc înscris, cerc circumscris unui triunghi. Patrulater ortodiagonal. Patrulater inscriptibil. Patrulater circumscriptibil. Condiții de inscriptibilitate, condiții de circumscriptibilitate.

Cercul lui Euler. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri. Teorema arcului capabil de un unghi dat. Poligoane regulate. Lungimea cercului și a arcului de cerc. Aria discului și a sectorului de cerc.